Les jumeaux de Langevin

François Meyer

October 5, 2000

1 Présentation

Le paradoxe des jumeaux de Langevin est un outil excellent pour tester sa compréhension des notions de base de la relativité restreinte et notamment celles de temps ou durée propres, et de référentiel inertiel.

Il ne paraît être un paradoxe que tant que ces notions ne sont pas claires.

Rappelons brièvement de quoi il est question : les 2 jumeaux sont ensemble sur Terre, l'un part dans l'espace faire un voyage à une vitesse proche de celle de la lumière et revient. A son retour, il est plus jeune que son frère resté sur Terre. Le paradoxe intervient lorsque l'on se pose la question de savoir pourquoi la situation n'est pas symétrique alors que de toute évidence, les vitesses relatives de l'un par rapport à l'autre sont les mêmes au signe près que les vitesses de l'autre par rapport à l'un...

L'erreur dans ce raisonnement vient du fait que le jumeau voyageur ne peut pas partir puis revenir en restant dans le même référentiel inertiel, et donc les résultats de la relativité restreinte ne peuvent s'appliquer à son cas. Il est alors nécessaire d'utiliser la relativité générale, pour intégrer les accélérations subies.

Cette explication, pour exacte qu'elle soit n'en est pas moins très frustrante puisque personne n'a envie de se cogner les calculs en relativité générale pour lever un paradoxe d'apparence aussi bégnine.

Cet article propose une alternative en démontant le mécanisme de l'expérience des 2 jumeaux *en restant dans le cadre de la relativité restreinte* et en détaillant ce qu'observe chacun des 2 frères à chaque phase du voyage.

L'essentiel de son propos est de montrer que c'est le demi-tour qui est la cause de la non-symétrie de la situation des 2 jumeaux, et que avant et après le demi-tour, les phénomènes observés sont totalement symétriques, sans contradiction ni paradoxe, pourvu que l'on sache exactement de quoi l'on parle.

1.1 Situation de départ

Les 2 jumeaux sont réunis au même endroit. On va considérer 3 référentiels inertiels (et non pas 2), l'un immobile R_1, les 2 autres R_2 et R_3 se déplaçant par rapport à R_1, à des vitesses identiques mais opposées $\vec{v}$ et $-\vec{v}$ de module égal par exemple à $0.3 \cdot c$, où c est la vitesse de la lumière dans le vide ($c \simeq 299792458 ms^{-1}$).

Pour bien décortiquer l'action, nous allons disposer des horloges régulièrement dans chacun de ces 3 référentiels.

Méfions-nous, "régulièrement" n'est pas défini de manière absolue ni dans le temps ni dans l'espace, et il faut donc préciser dans chacun des 3 cas :

- Dans R_1, on dispose des horloges H_1 (toutes synchronisées) au sol, de telle manière que J_2, pendant le voyage aller, passera devant l'une d'elles à chaque seconde du temps de J_1. La première horloge est nommée $H_{1,0}$. La suivante (dans l'ordre dans lequel J_2 va les rencontrer) est nommée $H_{1,1}$, puis $H_{1,2}$, $H_{1,3}$, etc...
- Dans R_2, on place des horloges H_2 de telle manière que, à chaque seconde du temps de R_2, une de ces horloges passera devant J_1. La première horloge est nommée $H_{2,0}$. La suivante (dans l'ordre dans lequel elles vont passer à la hauteur de J_1) est nommée $H_{2,1}$, puis $H_{2,2}$, $H_{2,3}$, etc...
- Dans R_3, on procède comme pour R_2 : on place des horloges de telle manière que à chaque seconde du temps de R_3, une de ces horloges passe devant J_1. La première horloge est nommée $H_{3,0}$. La suivante (dans l'ordre dans lequel elles vont passer à la hauteur de J_1) est nommée $H_{3,1}$, puis $H_{3,2}$, $H_{3,3}$, etc...

Donc, à chaque seconde qui va s'écouler dans R_1, J_1 verra passer, par définition, en même temps une horloge H_2 et une horloge H_3 et elles marqueront le même temps.

Au départ, toutes les horloges sont synchronisées, elles marquent le temps $T_0 = 0$.

Voici schématiquement ce qui va se passer, on examinera ensuite chaque phase dans le détail :

J_2 va successivement :

1. se mettre en route (sauter dans le référentiel R_2), au temps $T_0 = 0$;
2. voyager avec sa montre, qui lui indiquera son temps propre ; le temps de son vieillissement ;

   (Pendant ces deux premières phases, les 2 jumeaux sont dans des situations totalement symétriques, on le vérifiera).

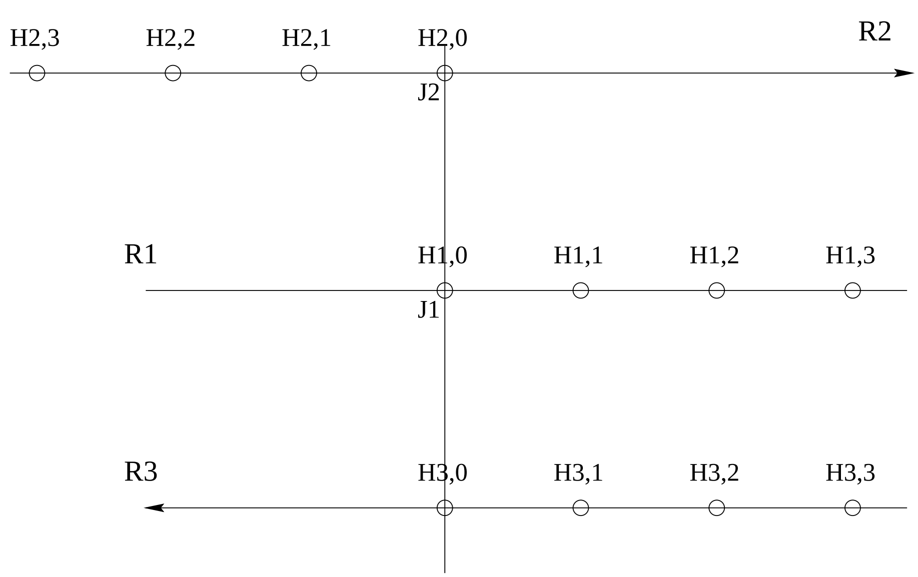


Figure 1: *Disposition des horloges dans les 3 référentiels.*

3. faire demi-tour (sauter dans le référentiel R_3),

   (C'est cet acte qui rompt la symétrie et creuse l'écart temporel).

4. faire le voyage de retour avec sa montre, dans R_3, en compagnie des horloges H_3.

   (Pendant cette phase, les situations sont à nouveau symétriques en ce qui concerne le comportement des différentes horloges observées, mais bien sûr, ce qui est fait est fait, et J_2 conserve le temps qu'il a volé durant le saut.)

5. retrouver son jumeau (sauter dans le référentiel R1), comparer sa montre à celle de J_1 et conclure.

Bien, tout est en place, allons dans le détail.

1.2 Départ

Au temps $T_0 = 0$, J_2 saute dans le repère R_2. Rien à dire.

1.3 Voyage aller

1. Observations de J_2

   Pendant le voyage il voit défiler les horloges de R_1 : entre le passage de 2 horloges H_1 consécutives, il constate qu'il s'écoule 1 seconde dans le temps de R_1 (chaque horloge rencontrée marque une seconde de plus que la précédente). Par contre s'il regarde sa montre, il constate qu'il s'écoule moins de 1 seconde entre le passage de 2 horloges H_1 successives... Plus précisément il s'écoule (voir Annexe 1 pour la démonstration) :

$$1 \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} (\simeq 0.95s \text{ pour } v = 0.3 \cdot c)$$

   Normal, tous les événements "une horloge H_1 passe devant J_2" se produisent dans le repère R_2 et la durée qui sépare 2 de ces événements n'est mesurable en temps propre que par la montre de J_2 ; toutes les autre horloges, et notamment les horloges H_1, mesurent un temps impropre donc plus long.

   Mais, s'il fixe une horloge particulière, disons H_{1n}, il la voit battre moins vite que la sienne : Plus précisément il s'écoule

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\simeq 1.048s \text{ pour } v = 0.3 \cdot c)$$

   dans R_2 entre chaque battement de l'horloge $H_{1,n}$.

   Normal, encore : les événements "battements de l'horloge H_{1n}" ont lieu dans le repère R_1 et la durée qui sépare 2 de ces événements n'est mesurable en temps propre que par l'horloge H_{1n} ; toutes les autres horloges ne mesurent que des temps impropres donc plus longs.

2. Observations de J_1

   Comme on l'a signalé, la situation des 2 jumeaux est complètement symétrique pendant cette phase. J_1 voit défiler les horloges H_2 : à chaque horloge, il constate qu'il s'écoule 1 seconde dans le temps de R_2 (chaque horloge qui passe à sa hauteur marque 1 seconde de plus que la précédente). Par contre, s'il regarde sa montre, il ne s'écoule de même que $\simeq 0.95s$ pour $v = 0.3 \cdot c$ entre les passages successifs de 2 horloges H_2...

   Normal, les événements "une horloge H_2 passe devant J_1" ont lieu dans R_1, et ne sont mesurables en temps propre que par la montre de J_1, toutes les autre horloges (et notamment les H_2) mesurent un temps impropre donc plus long.

   Mais, s'il fixe une horloge particulière, disons H_{2n}, il la voit battre moins vite que la sienne :

   Normal, encore : les événements "battements de l'horloge H_{2n}" ne sont mesurables en temps propre que par l'horloge H_{2n}, toutes les autres horloges ne mesurent que des temps impropres donc plus longs.

   Ainsi, pour J_1 chacune des horloges H_2 prises individuellement bat moins vite que les horloges H_1, pourtant, celles qui passent devant lui marquent un temps supérieur au temps marqué par sa montre (ou par l'horloge H_{10}).

   De la même manière, pour J_2, chacune des horloges H_1 prises individuellement bat moins vite que les horloges H_2, et pourtant celles qui passent devant lui marquent un temps supérieur au temps marqué par les horloges H_2.

Avant de continuer, il est indispensable de bien s'imprégner de ces résultats et de se convaincre des 3 points suivants :

1. l'application rigoureuse de la notion de durée propre suffit à énoncer ces constatations ;
2. la situation est totalement symétrique ;
3. et enfin et surtout, ces résultats ne sont pas contradictoires.

   <u>Tant qu'ils vous paraissent contradictoires, vous avez un problème avec la notion de temps propre, et il est inutile de continuer. Faîtes plutôt un tour par l'annexe 2.</u>

1.4 Demi-tour

Après une durée propre dans R_2 de $T_{1,R2}$, J_2 saute du repère R_2 au repère R_3.

Sa montre marque $T_{1,R2}$, comme toutes les H_2, et $T_{1,R2}$ est la mesure en temps propre de la durée du voyage aller. C'est à dire que dans tout autre repère, les horloges ont mesuré un temps supérieur à $T_{1,R2}$ pour la phase aller (voir l'annexe 2).

Que marquent les H_1 à ce moment ? Elles marquent un temps $T_{1,R1}$ qui vaut :

$$T_{1,R1} = \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

et bien sûr,

$$T_{1,R1} > T_{1,R2}$$

Par exemple

$$v = 0.3 \cdot c \text{ donne } T_{1,R1} \simeq 1.048 \cdot T_{1,R2}$$

Que marquent les horloges H_3 à ce moment ?
Pour cela on doit déterminer la vitesse relative des 2 repères, l'un par rapport à l'autre. En première approximation (cette approximation est d'autant plus fausse que la vitesse v est élevée), on pourrait dire que la vitesse relative des 2 repères R_2 et R_3 vaut $2 \cdot v$, ça ne gênerait pas le principe. Mais pour retomber sur nos pieds à la fin du voyage, nous prendrons la valeur "exacte", à savoir $v' = \frac{2 \cdot v}{\sqrt{1+\frac{v^2}{c^2}}} \simeq 1.83 \cdot v$ (voir l'annexe 3 pour une démonstration). Le temps qui s'est écoulé dans le repère R_3 vaut

$$T_{1,R3} = \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}$$

Par exemple

$$v = 0.3 \cdot c \text{ donne } T_{1,R3} \simeq 1.196 \cdot T_{1,R2}$$

qui, bien sûr, en tant que durée impropre est supérieure à $T_{1,R2}$ (ainsi qu'à $T_{1,R1}$, soit dit en passant).

Au moment du demi-tour, la situation est donc la suivante (entre parenthèses, les applications numériques pour $v = 0.3 \cdot c$) :

- Les H_2 marquent $T_{1,R2}$
- Les H_1 marquent $\frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} (\simeq 1.048 \cdot T_{1,R2})$
- Les H_3 marquent $\frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} (\simeq 1.196 \cdot T_{1,R2})$

Au demi-tour, J_2 se retrouve donc avec une horloge H_3 qui marque $T_{1,R3} \simeq 1.196 \cdot T_{1,R2}$ alors que sa propre montre ne marque que $T_{1,R2}$, ces 2 durées étant le temps qui s'est écoulé depuis le début de l'expérience dans les repères R_2 et R_3.
Si l'on se souvient que pour J_1, les horloges H_2 et H_3 qui défilent devant lui le font au même rythme et donc marquent le même temps, on pressent que ce demi-tour est bien le hold-up qui va permettre à J_2 de chambrer son jumeau sur la couleur de ses cheveux quand ils se retrouveront.

1.5 Voyage retour

Le retour est sans surprise et se passe exactement comme à l'aller, avec les mêmes constats et les mêmes symétries qu'à l'aller.

1.6 Retrouvailles

Bien. Jour de paye, faisons les comptes :

- La montre de J_2

  Pas de problème, elle marquait $T_{1,R2}$ au demi-tour ; le retour, effectué à la même vitesse a eu la même durée propre, c'est à dire $T_{1,R2}$, et donc à la fin du voyage, la montre de J_2 marque

$$2 \cdot T_{1,R2}$$

- La montre de J_1, et les horloges H_1

  Elles marquaient $T_{1,R1}$ au demi-tour. Le retour, effectué à la même vitesse a eu la même durée (impropre), c'est à dire $T_{1,R1}$ et, et donc à la fin du voyage, la montre de J_1, ainsi que les horloges H_1 marquent

$$2 \cdot T_{1,R1} = 2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} (\simeq 2.096 \cdot T_{1,R2})$$

  (J_1 est plus vieux de $0.096 \cdot T_{1,R2}$ que J_2).

  L'objection suivante peut être faite :

  Les 2 événements "départ de J_2" et "retour de J_2" ont lieu dans le repère R_1 ; donc la durée écoulée entre ces 2 événements n'est mesurable en temps propre que par les horloges H_1 ; dans tout autre repère, la durée mesurée doit être plus longue. Or, la montre de J_2 marque un temps inférieur...

  La montre de J_2 n'a pas fait la mesure dans un référentiel inertiel. Les seules horloges qui ont rempli cette condition sont les horloges H_2 et H_3, et on va voir (et ce de 2 manières différentes) qu'elles ont bel et bien mesuré un temps supérieur à celui marqué par les horloges H_1.

- les horloges H_2 et H_3

  1. Du point de vue de J_2
     il a sauté dans R_3 et s'est retrouvé avec une horloge H_3 qui marquait

$$\frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}} (\simeq 1.196 \cdot T_{1,R2})$$

Il voyage avec elle pendant le temps du trajet retour, qu'elle mesure maintenant en temps propre et qui vaut toujours $T_{1,R2}$; à la fin du voyage, elle marque donc :

$$\frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} + T_{1,R2}(\simeq 2.196 \cdot T_{1,R2})$$

Pour les horloges H_2, on retrouve les 2 mêmes termes, en ordre inverse : il voyage avec une horloge H_2 à l'aller, puis les voit défiler au retour à une vitesse de $v'(\simeq 1.83 \cdot v)$ ce qui traduit en temps donne :

$$T_{1,R2} + \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}(\simeq 2.196 \cdot T_{1,R2})$$

2. Du point de vue de J_1
   A la fin du voyage de J_2, la montre de J_1 (ou bien l'horloge $H_{1,0}$, c'est pareil) marque

$$2 \cdot T_{1,R1} = 2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(\simeq 2.096 \cdot T_{1,R2})$$

Pendant toute la durée du voyage, les horloges H_2 et H_3 ont défilé devant lui, accumulant de l'avance à un rythme constant et identique dans les 2 cas puisque les vitesses relatives étaient les mêmes au signe près ; à la fin du voyage, elles marquent donc :

$$2 \cdot T_{1,R1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

c'est à dire

$$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

ou encore

$$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

$$(\simeq 2.096 \cdot 1.048 \cdot T_{1,R2} \simeq 2.196 \cdot T_{1,R2})$$

2 Conclusion

Petit tableau récapitulatif des lectures des différentes horloges, par J_1 et par J_2, avec estimation chiffrée pour $v = 0.3 \cdot c$:

	J_1	J_2
H_1 (montre de J_1)	$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq 2.096 \cdot T_{1,R2}$	$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq 2.096 \cdot T_{1,R2}$
H_2	$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq 2.196 \cdot T_{1,R2}$	$T_{1,R2} + \frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} \simeq 2.196 \cdot T_{1,R2}$
H_3	$2 \cdot \frac{T_{1,R2}}{1-\frac{v^2}{c^2}} \simeq 2.196 \cdot T_{1,R2}$	$\frac{T_{1,R2}}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}} + T_{1,R2} \simeq 2.196 \cdot T_{1,R2}$
Montre de J_2	$2 \cdot T_{1,R2}$	$2 \cdot T_{1,R2}$

Et bien il n'y a pas de paradoxe :

1. J_2 est bel et bien plus jeune que J_1, quel que soit le point de vue choisi
2. des 3 référentiels inertiels, c'est dans R_1 que la durée propre de l'aller-retour (c'est à dire de la paire d'événements départ de J_2, retour de J_2) a été mesurée : en effet, les mesures des horloges H_2 et H_3 sont bel et bien plus grandes que celle faite par les horloges H_1 ;
3. les lectures des horloges sont indépendantes du point de vue choisi.

Pas de paradoxe donc, seulement des incompréhensions et des approximations invalides de ce que dit la relativité restreinte.

Annexe 1 : la dilatation du temps

Un des postulats de la relativité restreinte est l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à la vitesse de sa source. Dans tout référentiel inertiel, la vitesse de la lumière est constante et vaut $c = 299792458\, m \cdot s^{-1}$
La conséquence la plus surprenante de ce postulat, et qui est à la base du paradoxe qui nous occupe, est que la durée d'un phénomène donné peut dépendre du référentiel dans lequel la mesure est faite.
La manière la plus simple de mettre en évidence cette conséquence est de considérer un train dans lequel un signal lumineux va faire un aller-retour (verticalement) entre le plancher et le plafond. Ce qu'on veut faire, c'est chronométrer la durée de cet aller-retour d'une part dans le train, et d'autre part au sol. Pour le chronométrage dans le train, pas de problème, on démarre un chronomètre à l'émission du signal, et on l'arrête à son retour. Pour le chronométrage au sol, comme l'émission et le retour vont avoir lieu à 2 positions différentes, on ne peut faire la mesure simplement avec une seule horloge, mais il n'est pas difficile de concevoir un système qui permette de faire cette mesure sans ambiguïté (voir l'annexe 4 pour ceux qui ne seraient pas convaincus).

- la distance entre le plancher et le plafond est h ;
- le chemin parcouru par le signal lumineux dans un repère lié au train est $2 \cdot h$;
- le chemin parcouru par le signal lumineux dans un repère lié au sol est $2 \cdot H$;
- dans le train, on mesure pour l'aller-retour, une durée $2 \cdot t$;
- au sol, on mesure une durée $2 \cdot T$;
- le train va à la vitesse v ;
- le chemin parcouru par le train pendant l'aller-retour est $2 \cdot d$ avec $d = vT$.

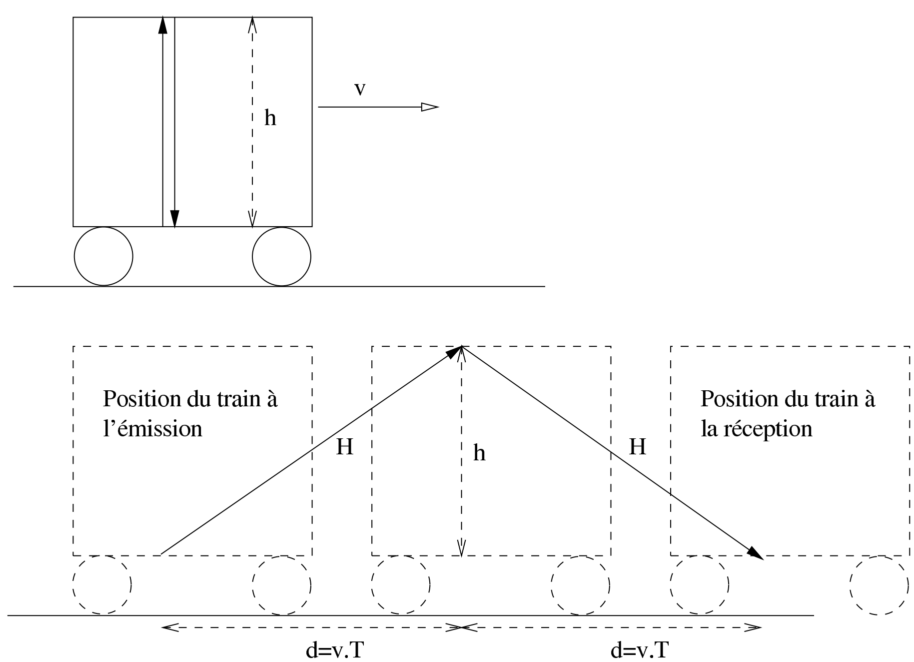


Figure 2: *Le petit train...*

Jusqu'ici rien de nouveau sous le soleil. Maintenant, si la vitesse de la lumière est la même dans les 2 référentiels, on a

$$c = \frac{h}{t} = \frac{H}{T}$$

et donc :

$$h = ct, H = cT$$

Ecrivons tout simplement le théorême de Pythagore :

$$H^2 = h^2 + d^2$$

il vient :

$$c^2T^2 = c^2t^2 + v^2T^2$$

puis :

$$T^2 = t^2 + \frac{v^2}{c^2}T^2$$

et

$$T^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = t^2$$

et finalement

$$T = \frac{t}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Et donc la durée du phénomène est plus grande dans le repère immobile que dans le repère lié au train

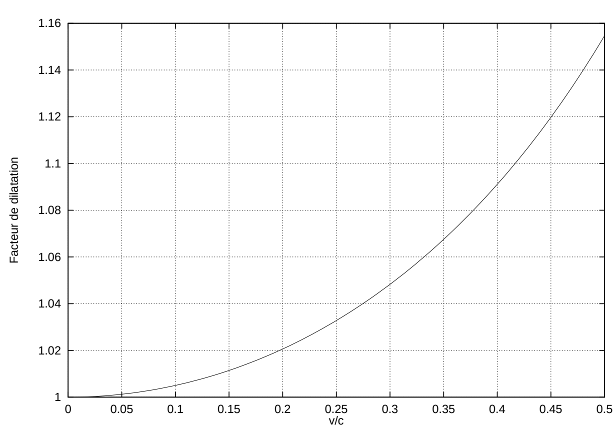
(voir l'annexe 2 pour des interprétations fantaisistes de ce résultat qui peuvent donner n'importe quoi si l'on ne sait pas exactement de quoi l'on parle).
Lorsque v est petit devant c, comme c'est très souvent le cas, la différence est minime ; par exemple :

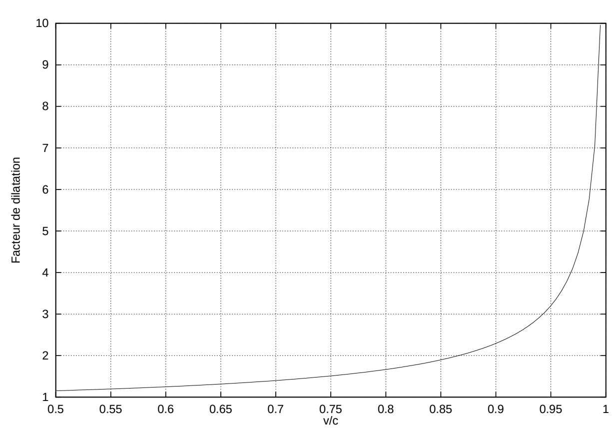
pour $v = 30000\ km/s = 0.1 \cdot c$ alors $T \simeq 1.005 \cdot t$

la dilatation du temps n'est que de 0.5 %.

pour $v = 270000\ km/s = 0.9 \cdot c$ alors $T \simeq 2.29 \cdot t$

la dilatation du temps est de 129 %.
Les 2 figures ci-dessous montrent le comportement de ce facteur en fonction du rapport $\frac{v}{c}$.





Annexe 2 : temps et durée propres

Ce qui est suggéré en annexe 1, c'est que la durée d'un événement se produisant dans un référentiel donné est plus courte si elle est mesurée par une seule et même horloge immobile dans ce référentiel (ce qui est le cas de l'horloge du train), que si elle est mesurée par une horloge en mouvement dans un autre référentiel -ou par 2 horloges différentes dans cet autre référentiel- (ce qui est le cas du dispositif au sol).
La durée mesurée par l'horloge immobile dans le référentiel de l'événement, est appelée ”durée propre de l'événement”. Dans tout autre référentiel inertiel, la durée mesurée de cet évènement sera supérieure.
Le terme ”temps propre” quoique très employé est générateur de confusions en ce qu'il suggère l'existence du temps en-dehors de tout phénomène à chronométrer, ce qui est une erreur, jusqu'à preuve du contraire. L'emploi du mot ”durée” incite à spécifier de quoi on parle et expose moins à l'erreur.
Deux exemples de conclusions hâtives :

- *”Le temps s'écoule moins vite dans un référentiel en mouvement”*
  C'est imprécis, et donc faux : les événements ayant lieu dans un référentiel immobile ont une durée propre évidemment inférieure à celle que mesurerait une horloge en mouvement.

- *”Donc, le temps s'écoule plus vite dans un référentiel en mouvement”*
  Toujours aussi imprécis, donc tout aussi faux : les événements se produisant dans un référentiel en mouvement ont une durée propre évidemment inférieure à celle que mesurerait une horloge immobile.

Le ”temps” n'a pas d'existence absolu, il n'est définissable que relativement à un événement à chronométrer, et en cela, utiliser le mot ”durée” est bien plus prudent, puisqu'il ne vient à personne l'idée de parler de ”durée” sans préciser de quel évènement il est question.

Annexe 3 : contraction des longueurs, composition des vitesses

(en travaux)

Annexe 4 : Dispositifs expérimentaux

Dans les expériences de pensée sur la relativité, le problème revient en fait souvent à placer 2 horloges synchrones en 2 points différents dans un référentiel donné. Et cela est faisable sans problème si l'on considère que l'on peut commencer par synchroniser les 2 horloges côte à côte puis les déplacer ensuite aux endroits voulus sans altérer la synchronisation, ou plus exactement, en rendant la désynchonisation due au déplacement aussi petite que l'on veut : en effet, si l'on déplace une horloge par rapport à l'autre, celle-ci va, à l'instar du jumeau 2, vieillir moins vite que celle qui reste au repos ; on pourrait se dire que si on fait le déplacement moins vite, d'un côté on sera moins sensible à l'effet relativiste, mais d'un autre côté, le déplacement durera plus longtemps et donnera un désynchronisme aussi important que si le voyage se fait très vite. Heureusement, on montre facilement que plus un déplacement a lieu lentement, plus le désynchronisme est faible. Pour un voyage de longueur D, qui dure une temps T, le désynchronisme entre l'horloge voyageuse et l'horloge statique vaudra

$$T - T \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{D}{T}\right)^2}{c^2}}} = T \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\left(\frac{D}{T}\right)^2}{c^2}}}\right)$$

qui tend vers 0 lorsque T tend vers l'infini (on s'en convaincra par un changement de variable $F = \frac{1}{T}$ puis un développement limité à l'ordre 2 au voisinage de 0. En posant $c = 1$ et $D = 1$, on obtient alors :

$$\frac{1}{F} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - F^2}}\right) \text{ ou encore } \frac{\sqrt{1 - F^2} - 1}{F \cdot \sqrt{1 - F^2}}$$

puis on développe à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$$\frac{1 - \frac{F^2}{2} - 1}{F\left(1 - \frac{F^2}{2}\right)} \text{ qui converge comme } \frac{F^2}{F}$$

qui tend bien vers 0 lorsque F tend vers 0 et donc lorsque T tend vers l'infini).
Tout cela pour conclure qu'il est toujours possible de placer dans un même référentiel à 2 endroits différents 2 horloges aussi synchrones qu'on le désire.